

Recap:

Schrödinger \leftrightarrow Heisenberg
CT III. G III

interacción
SK 5.5

Calculamos el valor esperado así

$$\langle A \rangle(t) = \langle \Psi_S(t) | \hat{A}_S | \Psi_S(t) \rangle = \langle \Psi_S(t_0) | \overbrace{\hat{U}^\dagger(t) \hat{A}_S \hat{U}(t)}^{\text{Schrödinger}} | \Psi_S(t_0) \rangle$$
$$= \langle \Psi_H | \underbrace{A_H(t)}_{\text{Heisenberg}} | \Psi_H \rangle$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} A_H(t) = [A_H(t), \hat{H}] + i\hbar \left(\frac{d}{dt} A_S(t) \right)_H$$

Oscilador armónico

10.2. Intro

- $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- $F_x = -\frac{dV}{dx} = -kx$
- $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- Aparece al estudiar sistemas cerca de su estado de equilibrio (límite de oscilaciones bajas)
- Vibraciones de moléculas, oscilaciones de una red cristalina
- Juega un papel central en electromagnetismo:
 - En una cavidad hay un número infinito (discreto) de modos normales de oscilación del campo.
 - Al describir el campo en términos de estos modos, cada uno obedece una ecuación estilo oscilador armónico.
 - El campo E.M. es equivalente a un conjunto de osciladores armónicos independientes.
 - La cuantización del campo se logra considerando cada modo normal de vibración como un oscilador armónico cuántico.
- Fue el oscilador armónico lo que llevó a Planck a definir h para describir la radiación de cuerpo negro.
- La energía promedio de un oscilador armónico en equilibrio termodinámico a temperatura T es diferente en el caso clásico y cuántico.
- Se usa para describir sistemas de muchas partículas idénticas. Es el único sistema con niveles de energía equidistantes.

[h ν]

10.3. Clásico

- $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$
- Solución $x = x_M \cos(\omega t - \varphi)$
- La energía cinética $p^2/2m$
- Energía potencial $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$
- Energía total $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$
- Al sustituir la solución en E obtenemos $E = \frac{1}{2}m\omega^2x_M^2$
- E determina x_M y viceversa
- Para un $V(x)$ arbitrario:
 - Si tenemos un mínimo en $V(x)$, podemos aproximar $V(x) \approx a + b(x - x_0)^2$

Descripción Clásica con "variables normales"

1. Quasi-classical states

1-a. Introducing the parameter α_0 to characterize a classical motion

The classical equations of motion of a one-dimensional harmonic oscillator, of mass m and angular frequency ω , are written:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}p(t) \\ \frac{d}{dt}p(t) = -m\omega^2 x(t) \end{array} \right. \quad (1a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}x(t) = \frac{1}{m}p(t) \\ \frac{d}{dt}p(t) = -m\omega^2 x(t) \end{array} \right. \quad (1b)$$

The quantum mechanical calculations we shall perform later will be simplified by the introduction of the dimensionless quantities:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{x}(t) = \beta x(t) \\ \hat{p}(t) = \frac{1}{\hbar\beta} p(t) \end{array} \right. \quad (2)$$

where:

$$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \quad [\hbar] = ET \quad [E] = M \frac{L^2}{T^2} \quad \left[\frac{m\omega}{\hbar} \right] = \frac{M \frac{1}{T}}{M \frac{L^2}{T^2 T}} = \frac{1}{L^2} \quad (3)$$

Equations (1) can then be written:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \omega \hat{p}(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\omega \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad (4a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) = \omega \hat{p}(t) \\ \frac{d}{dt}\hat{p}(t) = -\omega \hat{x}(t) \end{array} \right. \quad (4b)$$

The classical state of the harmonic oscillator is determined at time t when we know its position $x(t)$ and its momentum $p(t)$, that is, $\hat{x}(t)$ and $\hat{p}(t)$. We shall therefore combine these two real numbers into a single dimensionless complex number $\alpha(t)$ defined by:

$$\alpha(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{x}(t) + i \hat{p}(t)] \quad (5)$$

The set of two equations (4) is equivalent to the single equation:

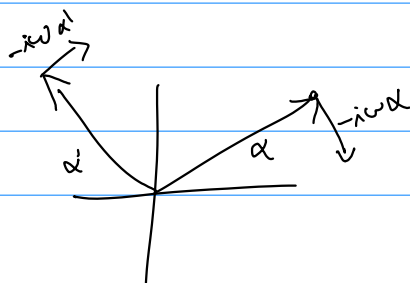
$$\frac{d}{dt}\alpha(t) = -i\omega \alpha(t) \quad -i\omega(x + i p) = -i\omega x + \omega p \quad (6)$$

whose solution is:

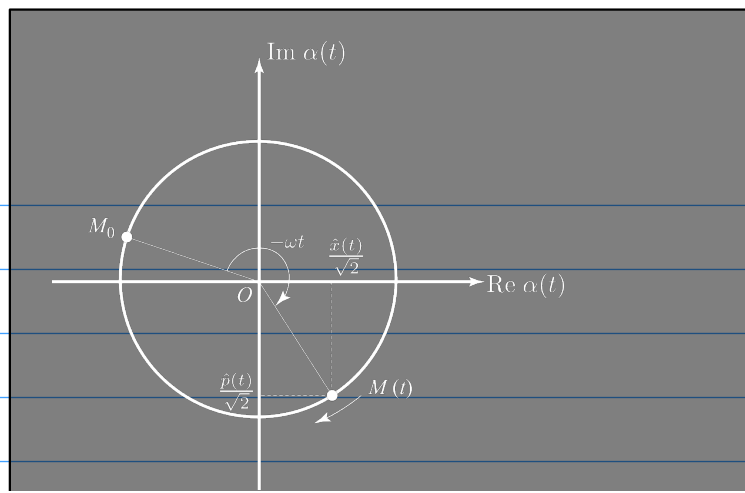
$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-i\omega t} \quad \dot{x} + i\dot{p} = \omega p - i\omega x \quad (7)$$

where we have set:

$$\alpha_0 = \alpha(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\hat{x}(0) + i \hat{p}(0)] \quad (8)$$



$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$ multiplicar por $-i$ es rotar 90°



(5) and (7), we have:

According to

$$\begin{cases} \hat{x}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\alpha_0 e^{-i\omega t} + \alpha_0^* e^{i\omega t}] & (9a) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{p}(t) = -\frac{i}{\sqrt{2}} [\alpha_0 e^{-i\omega t} - \alpha_0^* e^{i\omega t}] & (9b) \end{cases}$$

As for the classical energy \mathcal{H} of the system, it is constant in time and equal to:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{1}{2m} [p(0)]^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 [x(0)]^2 \\ &= \frac{\hbar\omega}{2} \{ [\hat{x}(0)]^2 + [\hat{p}(0)]^2 \} \end{aligned} \quad (10)$$

Con lo que obtenemos (usando (8))

$$\mathcal{H} = \hbar\omega |d_0|^2$$